

Пермский край  
2025-2026 учебный год  
**ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ**  
**ПО МАТЕМАТИКЕ**  
**МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП**  
**9 КЛАСС**

Время выполнения заданий — 235 минут (3 часа 55 минут).

Максимальная оценка за выполнение всех олимпиадных заданий — 35 баллов (по 7 баллов за каждую задачу).

- 9.1. Карлсон, Малыш и фрекен Бок сыграли на плюшки две игры (в каждой игре побеждал ровно один). После каждой игры победитель забирал у каждого противника столько плюшек, сколько было у победителя перед началом этой игры. После двух игр у Карлсона стало 17 плюшек, у Малыша — 8 плюшек, а у фрекен Бок — 21 плюшка. Найдите все возможные значения количества плюшек у Карлсона перед началом первой игры. У каждого игрока перед началом первой игры и между играми было целое неотрицательное количество плюшек.

**Ответ.** 8 или 29 плюшек.

**Решение.** Понятно, что у выигравшего игру количество плюшек утраивается. После второй игры только у фрекен Бок количество плюшек делилось на 3, значит фрекен Бок выиграла вторую игру, и перед этой игрой у Карлсона было бы  $17 + 7 = 24$  плюшки, и Малыша —  $8 + 7 = 15$  плюшек, у фрекен Бок — 7 плюшек.

Среди этих значений только 24 и 15 делятся на 3. Если первую игру выиграл Карлсон, то в самом начале распределение плюшек было: Карлсон — 8 плюшек, Малыш —  $15 + 8 = 23$  плюшки и фрекен Бок —  $7 + 8 = 15$  плюшек. Если первую игру выиграл Малыш, то в самом начале распределение плюшек было: Карлсон —  $24 + 5 = 29$  плюшек, Малыш — 5 плюшек и фрекен Бок —  $7 + 5 = 12$  плюшек.

**Комментарий.** Только ответ — 2 балла.

Сказано, что у выигравшего игру количество плюшек утраивается — 2 балла.

- 9.2. Найдётся ли три таких положительных действительных числа  $x$ ,  $y$  и  $z$ , что  $x + y + z = 1$  и  $(1 - x)(1 - y)(1 - z) = 2xyz$ ?

**Ответ.** Нет.

**Первое решение.** Допустим, что такие числа найдутся. Тогда  $1 - x - y - z + xy + yz + zx - xyz = 2xyz$ ,  $xy + yz + zx = 3xyz$ . Отметим, что  $x = 1 - y - z < 1$ , и по тем же причинам  $y < 1$  и  $z < 1$ . Осталось заметить, что тогда  $xy > xyz$ ,  $yz > xyz$ ,  $zx > xyz$  и  $xy + yz + zx > 3xyz$ .

**Второе решение.**  $1 - x = y + z$ ,  $1 - y = x + z$ ,  $1 - z = x + y$ , поэтому  $(1 - x)(1 - y)(1 - z) = (y + z)(z + x)(x + y) = 2xyz + x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y > 2xyz$ .

**Третье решение.**  $1 - x = y + z$ ,  $1 - y = x + z$ ,  $1 - z = x + y$ , поэтому  $(1 - x)(1 - y)(1 - z) = (y + z)(z + x)(x + y)$ . Из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим  $y + z \geq 2\sqrt{yz}$ ,  $z + x \geq 2\sqrt{zx}$  и  $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ . Значит  $(y + z)(z + x)(x + y) \geq 8xyz > 2xyz$ .

**Четвёртое решение.**  $1 - x = y + z$ ,  $1 - y = x + z$ ,  $1 - z = x + y$ , поэтому  $(1 - x)(1 - y)(1 - z) = (y + z)(z + x)(x + y)$ . Без ограничения общности, можно считать, что  $0 < x \leq y \leq z$ , поэтому  $y + z > z$ ,  $z + x \geq 2x$ ,  $x + y > y$ . Отсюда  $(y + z)(z + x)(x + y) > z \cdot 2x \cdot y = 2xyz$ .

**Комментарий.** Доказано, что исходное уравнение равносильно либо уравнению  $xy + yz + zx = 3xyz$ , либо уравнению  $(y + z)(z + x)(x + y) = 2xyz - 2$  балла.

- 9.3. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник  $ABC$ , касается катетов  $AC$  и  $CB$  соответственно в точках  $B_1$  и  $A_1$  и касается гипотенузы  $AB$  в точке  $C_1$ . На отрезке  $AB_1$  нашлась такая точка  $F$ , что  $AF = CA_1$ . Докажите, что  $FA_1 \perp B_1C_1$ .

**Решение.** Пусть  $I$  — центр вписанной в треугольник  $ABC$  окружности. Тогда  $\angle IA_1C = \angle IB_1C = 90^\circ$ , при этом  $\angle ACB = 90^\circ$  и  $IA_1 = IB_1$ , значит  $CA_1IB_1$  квадрат.  $AF = CA_1 = IA_1$  и  $AF \parallel IA_1$ , значит  $AFA_1I$  параллелограмм, поэтому  $FA_1 \parallel AI$ .

Заметим, что  $AB_1 = AC_1$  как отрезки касательных, проведённых из одной точки. Так как  $AI$  — биссектриса угла  $BAC$  и

$AC_1 = AB_1$ , то прямая  $AI$  проходит через высоту равнобедренного треугольника  $AB_1C_1$ , значит  $AI \perp B_1C_1$  и  $FA_1 \perp B_1C_1$ .

**Комментарий.** Доказано, что  $FA_1 \parallel AI$  — 4 балла.

Доказано, что  $AI \perp B_1C_1$  — 2 балла.

**Замечание.** То, что  $CA_1IB_1$  — квадрат можно использовать без доказательства.

9.4. Докажите, что при любом натуральном  $n$  число  $7^n - 1$  не делится на число  $6^n - 1$ .

**Первое решение.**  $6^n - 1 = (6 - 1)(6^{n-1} + \dots + 6 + 1) : 5$ , поэтому если  $7^n - 1 : 6^n - 1$ , то  $7^n - 1 : 5$ . Заметим, что  $7^4 = 49^2 = 5t + 1$ , поэтому  $7^{4k} = (5t + 1)^k = 5s + 1$  (в выражении  $(5t + 1) \dots (5t + 1)$  при раскрытии скобок все слагаемые делятся на 5, кроме 1).

$7^0 = 1$ ,  $7^1 = 7 = 5 + 2$ ,  $7^2 = 5 \cdot 9 + 4$ ,  $7^3 = 5 \cdot 68 + 3$ . Если  $n = 4k + r$  (запись деления с остатком на 4), то  $7^n - 1 = 7^{4k+r} - 1 = 7^r \cdot (5s + 1) - 1$  делится на 5 только при  $r = 0$ .

Итак, единственная возможность  $n = 4k$ , но тогда  $6^{4k} - 1 = 36^{2k} - 1 = (36 - 1)(36^{2k-1} + \dots + 36 + 1) : 7$ . Но  $7^n - 1$  на 7 делится не может.

**Второе решение.** Пусть при каком-то  $n$  число  $7^n - 1$  делится  $6^n - 1$ . Так как  $6^n - 1 \stackrel{5}{\equiv} 1^n - 1 \stackrel{5}{\equiv} 1 - 1 \stackrel{5}{\equiv} 0$ , то  $6^n - 1 : 5$ , и значит  $7^n - 1 : 5$ .

Заметим, что  $7^4 \stackrel{5}{\equiv} 2^4 \stackrel{5}{\equiv} 16 \stackrel{5}{\equiv} 1$ . Поэтому  $7^{4k} \stackrel{5}{\equiv} (7^4)^k \stackrel{5}{\equiv} 1^k \stackrel{5}{\equiv} 1$ ,  $7^{4k+1} \stackrel{5}{\equiv} 2$ ,  $7^{4k+2} \stackrel{5}{\equiv} 2^2 \stackrel{5}{\equiv} 4$ ,  $7^{4k+3} \stackrel{5}{\equiv} 2^3 \stackrel{5}{\equiv} 3$ .

Поэтому  $7^n - 1 : 5$  только если  $n = 4k$ . Но в этом случае  $6^{4k} - 1 \stackrel{7}{\equiv} (-1)^{4k} - 1 \stackrel{7}{\equiv} 1 - 1 \stackrel{7}{\equiv} 0$ , значит  $7^n - 1 : 7$ , что невозможно.

**Комментарий.** Доказано, что если  $7^n - 1 : 6^n - 1$ , то  $7^n - 1 : 5 - 2$  балла.

Доказано, что если  $7^n - 1 : 5$ , то  $n = 4k - 2$  балла.

Доказано, что если  $n = 4k$ , то  $6^n - 1 : 7 - 2$  балла.

**Замечание.** Цифры единиц чисел  $a^n$  ( $a, n \in \mathbb{N}$ ) образуют периодическую последовательность при росте  $n$ . Поэтому зависимость остатков от деления на 5 чисел  $6^n - 1$  и  $7^n - 1$  от  $n$  может быть найдена рассмотрением цифр в разряде единиц конечного набора чисел такого вида. Именно, последняя цифра всех чисел вида  $6^n - 1$  равна 5. Последние цифры чисел  $7^n - 1$  образуют периодическую последовательность 6, 8, 2, 0, 6, 8, 2, 0, ... с

периодом 4. Если решение использует эти факты, то периодичность нужно объяснять.

- 9.5. На острове живёт 500 человек, каждый из которых является либо рыцарем, либо лжецом, при этом на острове живёт хотя бы один рыцарь. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Путешественник, который не является ни рыцарем, ни лжецом, хочет выяснить, кто из жителей рыцарь, а кто лжец. Он может раз в день выбрать любую группу жителей, собрать их в одном зале и спросить у каждого, сколько лжецов в зале (каждый житель острова знает про остальных, кто рыцарь, а кто лжец; каждый опрошенный называет в ответ число). За какое наименьшее количество дней путешественник гарантированно сможет узнать про каждого жителя, рыцарь тот или лжец?

**Ответ.** 2.

**Решение.** Докажем, что одного дня не хватит. Если кого-то не собрали в зале, мы не способны узнать про него, лжец он или нет. Поэтому в зале должны быть все жители острова. Если 1 человек ответит «499», а 499 — «1», то возможна как ситуация, когда на острове 1 лжец и 499 рыцарей, так и ситуация, когда на острове 1 рыцарь и 499 лжецов. Поэтому мы не способны узнать кто из жителей кто.

Докажем, что 2 дней хватит. В первый день соберём в зале всех жителей острова. После опроса разделим их на группы. При этом два человека будут в одной группе тогда и только тогда, когда они ответили одинаково. Все рыцари должны назвать одинаковое число, поэтому они будут в одной группе, при этом лжецов там не будет. Так как хотя бы один рыцарь на острове есть, одна из групп будет целиком состоять из рыцарей, во всех остальных группах будут лжецы. Если образуется ровно одна группа, то на острове живут только рыцари. Если нет, перейдёт ко второму дню.

Во второй день выберем из каждой группы по одному человеку. Мы выберем ровно одного рыцаря и какое-то количество лжецов. Если в группе будет  $m$  человек, то тот, кто скажет « $m - 1$ » будет рыцарем, как и вся его исходная группа. Остальные жители — лжецы.

**Комментарий.** Только ответ — 1 балл.

Доказано, что двух дней хватит — 4 балла.

Предыдущие 2 пункта не суммируются.

Доказано, что одного дня не хватит — 3 балла.

**Замечание.** Если на острове  $k$  рыцарей, то в первый день все они должны ответить  $500 - k$ . Поэтому если ответ группы был  $500 - i$  и количество людей в этой группе не равно  $i$ , то в ней гарантированно лжецы, и представителя этой группы во второй день можно не звать.